

(revoir la dernière page des notes manuscrites précédentes)

- le lien entre composition d'applications linéaires et le produit de matrices;
- le lien entre la reciproque d'une application linéaire et l'inverse d'une matrice;
- déterminant d'une matrice carrée 2×2 et inverse;
- matrices élémentaires
- calcul du noyau et de l'image

Lien entre composition et produit (p. 95-96)

Soient $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. On rappelle que

$$[T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{\substack{\in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ n \text{ colonnes}}} \left\{ \begin{array}{l} m \text{ lignes} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad [S] = \underbrace{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}}_{\substack{\in M_{p \times m}(\mathbb{R}) \\ m \text{ colonnes}}} \left\{ \begin{array}{l} p \text{ lignes} \end{array} \right.$$

et

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = [S] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $\forall y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ (voir Thm 5.1).

Alors $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire et

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

(Preuve) On voit que

$$[S \circ T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Thm. 5.1 pour } S \circ T}{=} (S \circ T) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \stackrel{\text{Thm. 5.1 pour } S}{=} [S] \cdot T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Thm. 5.1 pour } T}{=} [S] \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. D'après la partie d'unicité du Thm. 5.1 pour $S \circ T$, on conclut que $[S \circ T] = [S] \cdot [T]$.
On laisse au lecteur / à la lectrice la vérification que la composition d'applications linéaires est linéaire. $\square$

SLOGAN: Composition d'app. lin. = Produit de leur matrices canoniques

Une conséquence intéressante

FAIT Comme $I_n = [\underbrace{\text{id}_{\mathbb{R}^n}}_{\text{matrice identité}}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors, si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective, on a que $[T]$ est inversible et $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

(Preuve) Comme $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, alors

$$\underbrace{[T] \cdot [T^{-1}]}_{[T \circ T^{-1}]} = \underbrace{[T^{-1}] \cdot [T]}_{[T^{-1} \circ T]} = [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$$

d'après le fait précédent

ce qui nous dit que $[T]$ est inversible et $[T]^{-1} = [T^{-1}]$. $\square$

Pourquoi calculer des inverses? $\rightarrow$ Cela permet de résoudre certains SEL!

$\Downarrow$
 $\in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^n$
Si $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ est un SEL et A est inversible, alors
 $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

(Preuve) $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, i.e. $\underbrace{I_n \cdot \vec{x}}_{\vec{x}} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ $\square$

§ 7.3. Inversion de matrices carrées de taille 2×2

Thm. 7.6 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si

déterminant $\rightarrow \det(A) := \underbrace{ad - bc}_{\neq 0}$
de A

En plus, si $ad - bc \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
(série 6)

(Preuve) $\Leftarrow$ Si $ad-bc \neq 0$, on pose $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors 21

$$B.A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ On va montrer la propriété

$$\boxed{\det(A.A') = \det(A) \cdot \det(A') \quad , \forall A, A' \in M_2(\mathbb{R})}$$

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors $A.A' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$

ce qui nous dit que

$$\begin{aligned} \det(A.A') &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bc'cb' + \cancel{bc'dd'} - \cancel{ab'ca'} - ab'dc' - \cancel{bd'ca'} - \cancel{bd'dc'} \\ &= (ad-bc)(a'd'-b'c') = \det(A) \cdot \det(A'). \end{aligned}$$

Or, si A est inversible, alors $A.A^{-1} = I_2$, ce qui nous dit que

$$1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \neq 0. \square$$

Exemple 7.7 Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ on voit que $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$ et donc A est inversible. En plus

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

En conséquence, donné le SEL

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

on trouve la solution

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ (3/2)b_1 - b_2/2 \end{pmatrix}$$

Calcul du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Noyau Pour calculer $\text{Ker}(T)$ on rappelle que

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : [T] \cdot \bar{x} = \mathbf{0} \right\}$$

$\uparrow$
Thm 5.1

i.e.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \text{Solutions du SEL } [T] \cdot \bar{x} = \mathbf{0} \right\}.$$

homogène

Exemple (Exercice 5) (Série 4) $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$

On voit que

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les sol. de $[T] \cdot \bar{x} = \mathbf{0}$, on calcule la FER de $[T]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{7}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{variables liées} & \text{variable libre} \\ x_1 = -6x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

et

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{T \text{ n'est pas injective}} \quad (\text{car } \text{Ker}(T) \neq \{0\})$$

Image Pour calculer $\text{Img}(T)$, on rappelle que

$$\text{Img}(T) = \text{Vect} \left\{ T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n) \right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Thm. 5.1 $\rightarrow$ 1^{ère} colonne de $[T]$... n^{ème} colonne de $[T]$

$$= \left\{ [T] \cdot \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En conséquence, T est surjective ssi $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ admet une solution, $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Exemple (suite) Pour l'application linéaire de l'exemple précédent,

on voit que

$$[[T] | \bar{b}] \xrightarrow{\text{OEL}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3' \end{array} \right)$$

ce qui nous dit que

$$[T] \cdot \bar{x} = \bar{b} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{un certain vecteur } \bar{b}' \text{ que s'obtient à partir de } \bar{b}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -6x_4 + b_1' \\ x_2 = -2x_4 + b_2' \\ x_3 = x_4 + b_3' \end{cases}$$

i.e. $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ est toujours compatible $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow T$ est surjective $\square$

§ 7.4. Inversion d'une matrice carrée de taille n avec n général

Déf. 7.9 Une matrice carrée de taille n est dite élémentaire si elle s'obtient de la matrice identité en effectuant précisément une OEL.

Exemple 7.10* (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} A$;

(ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-2)L_2} B$;

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3} C$.

RK FONDAMENTALE

Soit $E \in \text{IM}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice

élémentaire qui donne une certaine OEL. Alors, pour toute matrice $A \in \text{IM}_{n \times m}(\mathbb{R})$:

$$A \xrightarrow{\text{OEL}} E \cdot A$$

même OEL

(Preuve) On a

(OEL.I) $L_i \leftrightarrow L_j$ ($i < j$) $\leftarrow$ Matrice élémentaire $E = E(L_i \leftrightarrow L_j)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(OEL.II) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$) $\leftarrow$ Matrice élémentaire $E = E(L_i \leftarrow \lambda L_i)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(OEL.III) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$) $\leftarrow$ Matrice élémentaire $E = E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{for } i < j)$$

Alors, on voit que

$$\left. \begin{aligned} A &\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \cdot A \end{aligned} \right\} \text{Vérifier-le! } \nabla$$

par définition de produit matriciel et des matrices $E(?)$.

Par exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E(L_i \leftrightarrow L_j)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,m} \\ A_{j+1,1} & \dots & A_{j+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i-1,1} & \dots & A_{i-1,m} \\ A_{i+1,1} & \dots & A_{i+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}$$

- i-ème ligne
- j-ème ligne

Dans cette séance, on va voir:

(03.10)

(revoir les deux pages précédentes des notes manuscrites)

- lien entre matrices élémentaires et matrices inversibles;
- le calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible avec la méthode de Gauss-Jordan; $\leadsto$ exemples aussi!
- d'autres descriptions de l'inversibilité;

Corollaire (Lemme 12) Toute matrice élémentaire est inversible.

(Preuve) En effet,

- $I_n \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftrightarrow L_j) \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot E(L_i \leftrightarrow L_j) \Rightarrow E(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = E(L_i \leftrightarrow L_j)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftrightarrow L_j & L_i \leftrightarrow L_j \\ \hline \end{array} \right| = id$
- $I_n \xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \xrightarrow{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} E(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i) E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \Rightarrow E(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = E(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftarrow \lambda L_i & L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i \\ \hline \end{array} \right| = id$
- $I_n \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j) E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \Rightarrow E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = E(L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j & L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j \\ \hline \end{array} \right| = id$